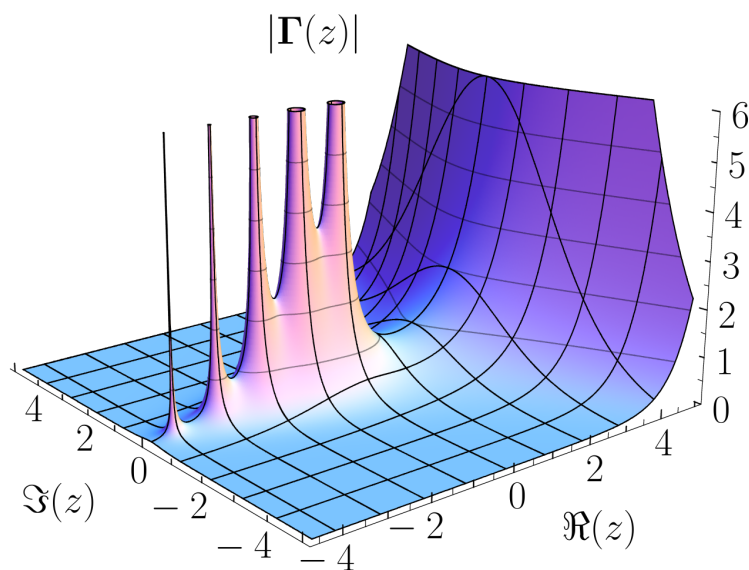


UNIVERSITÉ DE RENNES

MÉMOIRE - PRÉPARATION À L'AGRÉGATION

Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.



Source : Wikipédia

Baptiste DUGUÉ

Encadré par : Bachir BEKKA

Année 2023/2024

Table des matières

1	Introduction historique	2
2	Plan	3
2.1	Analycité et holomorphie	3
2.1.1	Fonctions analytiques	3
2.1.2	Fonctions holomorphes	4
2.1.3	Théorie de Cauchy	5
2.2	Exponentielle et logarithmes	7
2.3	Vers le théorème de représentation conforme	8
2.3.1	Principe du maximum et conséquences	8
2.3.2	Robustesse	9
2.3.3	Compacité	9
2.3.4	Transformations conformes	9
2.4	Fonctions méromorphes	12
2.4.1	Définitions	12
2.4.2	Théorème des résidus	12
2.4.3	Étude d'une fonction spéciale	13
3	Questions de jury	15

1 Introduction historique

Les mathématiques sont difficiles par essence, et les chemins empruntés par ses acteurs dans l'élaboration de théories consistantes sont bien souvent sinueux, contrairement à ce que peuvent laisser croire nombre de cours présentant une synthèse "propre", "bien rangée" voire "naturelle" de notions qui ont parfois demandé des siècles de travail pour émerger explicitement. L'analyse complexe ne fait pas exception à ce constat, d'autant plus qu'il s'agit d'un domaine s'étant construit au carrefour de plusieurs écoles, visions et sensibilités mathématiques.

L'organisation du plan présenté dans ce mémoire, qui ne prétend absolument pas à une quelconque forme d'exhaustivité, a ainsi été pensée dans un objectif de cohérence mathématique mais aussi historique. La première partie a pour but affiché de présenter différents points de vue menant à la notion d'holomorphie tout en explicitant le fait qu'ils aboutissent bien à une même construction. Les deuxième et troisième parties donnent des premiers exemples d'utilisation de la théorie, avec en ligne de mire la présentation du théorème de représentation conforme qui est une illustration particulièrement riche et élégante du point de vue "géométrique" de la leçon. Enfin, la dernière partie propose une excursion dans le monde des fonctions méromorphes, motivée par l'étude de la fonction Γ .

Tout en gardant à l'esprit que les attributions définitives d'inventions de concepts ou d'introduction de notions relèvent parfois plus de la simplification historique que de l'hommage légitime (à titre d'exemples, la postérité a retenu le nom de Cauchy pour toute la théorie traitant de l'intégration de fonctions complexes alors que Gauss était probablement le premier à développer ces concepts, faute de les publier, mais a attribué à Liouville un théorème qui était, lui, bien l'œuvre de Cauchy), on peut dégager au moins trois noms de mathématiciens ayant joué un rôle clé dans l'élaboration de la théorie des fonctions holomorphes :

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français touche-à-tout et extrêmement prolifique. Professeur à Polytechnique, il formalise dans son *Cours d'Analyse* les rudiments de l'analyse, en portant une attention particulière à la rigueur des définitions présentées et à la bonne convergence des objets introduits. Il développe notamment la théorie de l'intégration qui, dans le cadre des fonctions holomorphes, lui permet de démontrer le théorème aujourd'hui considéré comme le point de départ de ce domaine, à savoir l'équivalence entre dérivabilité complexe et analyticité. On lui doit également le théorème des résidus.

Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand.  l ve de Carl Friedrich Gauss, il apporte un point de vue géométrique hérité de son enseignement en physique mathématique à la théorie des fonctions d'une variable complexe, en introduisant la notion de surfaces de Riemann dans sa thèse soutenue en 1851. Il est l'auteur du premier développement proposé dans ce mémoire, à savoir le théorème de représentation conforme.

Enfin, **Karl Weierstrass** (1815-1897) est un mathématicien allemand ayant lui aussi travaillé à la formalisation de l'analyse de son époque, notamment sur la théorie des séries. En particulier, il a donné des formulations plus rigoureuses de notions introduites par Cauchy. Dans l'étude des fonctions holomorphes, il a majoritairement adopté le point de vue consistant à étudier les fonctions développables en séries entières (voire même en séries de Laurent, avant leur publication par le mathématicien français Pierre Alphonse Laurent !). Notons également qu'il a soulevé une erreur dans la démonstration initiale du théorème de représentation conforme de Riemann : ce dernier supposait qu'une certaine borne inférieure était toujours atteinte, Weierstrass a fourni un contre-exemple. La preuve que l'on présentera ici se basera plutôt sur les travaux ultérieurs de Paul Montel (1876-1975).

Pour la lectrice intéressée par l'histoire du développement de la théorie des fonctions holomorphes, je recommande très chaudement la lecture des nombreuses notes historiques de [Rem].

2 Plan

Dans toute la suite du texte, on appellera **domaine** un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et Ω désignera, sauf mention contraire, un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Le disque unité du plan complexe sera noté $\mathbb{D}$. La lettre $\mathbb{H}$ désignera le demi plan supérieur, aussi appelé demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.

2.1 Analyticité et holomorphicité

Dans son article *L'œuvre mathématique de Weierstrass* publié en 1898, Henri Poincaré écrit : "La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstrass, et il est aisé de comprendre comment elle pouvait, en se développant dans deux sens différents, donner naissance à l'une et à l'autre. La méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration."

La "théorie de Cauchy" est celle de l'intégration des fonctions complexes présentée dans la dernière section de cette première partie. C'est à partir de ces travaux, entamés à l'origine pour eux-mêmes, que se développera la théorie des fonctions holomorphes, au point qu'il s'agit d'un passage inévitable de toute présentation moderne du sujet. En particulier, elle fournit le moyen le plus simple de relier la "méthode de Riemann" consistant à mettre l'accent sur les propriétés géométriques de fonctions dérivables en chaque point "selon toutes les directions", et la "méthode de Weierstrass", à savoir l'étude systématique des fonctions développables en séries entières.

2.1.1 Fonctions analytiques

Commençons par présenter le "point de vue de Weierstrass" ainsi que quelques résultats reposant essentiellement sur l'analyticité des fonctions étudiées.

Définition 1 (Fonction analytique). Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, il existe $\delta > 0$ et une série entière

$$\sum_{n \geq 0} c_n(a) z^n$$

de rayon de convergence $R \geq \delta$, tels que $|z - a| < \delta$ implique $z \in \Omega$ et

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(a)(z - a)^n.$$

On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω .

Exemples 2. — Les fonctions polynômes sont analytiques sur tout ouvert.

— La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car, si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z - a| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z - a)^n.$$

— Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(z)$. On note $\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ le disque ouvert de convergence. Alors $S \in A(\mathcal{D}_R)$ et on a plus précisément si $a \in \mathcal{D}_R$ et si $|z - a| < R - |a|$,

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k.$$

Théorème 3 (Principe du prolongement analytique). Soient Ω un domaine, $a \in \Omega$ un point du domaine et $f \in A(\Omega)$ une fonction analytique sur ce domaine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est identiquement nulle sur Ω .
- (ii) f est identiquement nulle sur un voisinage de a .
- (iii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 4. Soient Ω un domaine et $f, g \in A(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω , alors $f = g$.

Théorème 5 (Principe des zéros isolés). Soient Ω un domaine et $f \in A(\Omega)$ non identiquement nulle. Pour tout a zéro de f , il existe un voisinage ouvert de a sur lequel f n'admet pas d'autre zéro.

Corollaire 6. Pour tout domaine Ω , l'anneau $A(\Omega)$ est intègre.

2.1.2 Fonctions holomorphes

Intéressons nous maintenant au point de vue développé à la fois par Cauchy et Riemann, mêlant à la fois méthodes d'analyse réelle et intuition géométrique. L'idée est de donner un sens à la notion de dérivation pour des fonctions d'une variable complexe.

Définition 7 (Fonction holomorphe). Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **holomorphe** en $a \in \Omega$ si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, et on note alors $f'(a)$ cette limite que l'on appellera **dérivée de f en a** . La fonction f sera dite **holomorphe** sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω .

On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Remarque 8. Les formules de dérivation usuelles pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (linéarité, somme, produit, quotient, chain rule...) restent vérifiées pour la dérivation complexe.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. La bijection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z = x + iy$ permet d'identifier Ω à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Il en résulte qu'une fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ s'identifie à une fonction de deux variables réelles x et y . Par abus d'écriture, on note encore $f(x, y)$ pour $f(z)$.

Les applications $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto z = x + iy$ sont évidemment différentiables en chaque point de $\mathbb{R}^2$. On note dx , dy et dz leurs différentielles respectives, de sorte que $dz = dx + idy$.

Proposition 9. Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est dérivable (au sens "holomorphe" de la définition 7) en z_0 .
- (ii) f est différentiable en (x_0, y_0) et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

- (iii) f est différentiable en (x_0, y_0) et $df(x_0, y_0) \in \mathbb{C}dz$.

Si ces conditions sont vérifiées, on a :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ainsi, lorsqu'on considère une fonction f définie sur un ouvert Ω , il est équivalent qu'elle y soit holomorphe ou qu'elle y vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Notons P et Q les parties réelles et imaginaires de f , de sorte que $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ pour tout $(x + iy) \in \Omega$ avec P et Q à valeurs réelles. Dans ce contexte, la condition (1) se réécrit alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2)$$

En résumé, on a la proposition suivante :

Proposition 10. *Une fonction f définie sur un ouvert Ω est holomorphe si et seulement si elle y vérifie les conditions (1) et (2). On appelle ces conditions les **conditions de Cauchy-Riemann**.*

On peut donner d'autres formulations de ces conditions et de la dérivée d'une fonction holomorphe via l'introduction de la fonction $(x, y) \mapsto \bar{z} = x - iy$. Cette fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, de différentielle $d\bar{z} = dx - idy$. On en déduit les égalités $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ et $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$.

Pour f différentiable sur Ω , on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Proposition 11. *Les conditions de Cauchy-Riemann se réécrivent comme :*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Proposition 12. *Compte tenu de ce qui précède, pour $f \in H(\Omega)$, on a :*

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En utilisant les notations P et Q pour les parties réelles et imaginaires de f , ceci s'écrit encore :

$$f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2.1.3 Théorie de Cauchy

Nous présentons maintenant la théorie féconde de l'intégration selon un contour. Nous illustrerons son importance par la réunion des deux points de vue présentés précédemment au théorème 24. Il s'agit peut-être du résultat central de toute cette première partie. Nous donnerons aussi une preuve simple du théorème de D'Alembert-Gauss qui a historiquement été "démontré" à de nombreuses reprises à l'aide d'arguments imprécis voire faux, faisant de la démonstration via le théorème de Liouville un argument brillant autant par son élégance que par son apport conceptuel à la rigueur mathématique.

Définition 13. Soit X un espace topologique. Un **chemin** sur X est une application continue et C^1 par morceaux $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Un **lacet** sur X est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$. L'image d'un chemin γ sera notée γ^* .

Définition 14. Deux chemins continus γ_0 et γ_1 sur X sont dits **homotopes** s'il existe une application continue $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que $\forall t \in [0, 1], h(0, t) = \gamma_0(t)$ et $h(1, t) = \gamma_1(t)$.

Définition 15. Soient γ un chemin et f une fonction continue sur γ^* . On définit l'intégrale de f le long du chemin γ de la façon suivante :

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Remarque 16. La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la vitesse de parcourt du chemin. Formellement, si φ est une bijection continue de $[0, 1]$ dans lui-même et γ_1, γ_2 deux chemins vérifiant $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$, alors on a pour toute fonction f continue sur $\gamma_1^* = \gamma_2^*$:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Deux tels chemins sont dits **équivalents**.

En revanche, parcourir un chemin dans "le sens opposé" modifie le signe de la valeur de l'intégrale. Si on dispose d'un chemin γ et d'un chemin $\tilde{\gamma}$ défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$, alors on a pour toute fonction f continue sur γ^* :

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = - \int_{\gamma} f.$$

Définition 17 (Indice). Soit γ un lacet et notons Ω le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de γ^* . Pour tout point $z \in \Omega$, on définit l'**indice de z pour γ** de la façon suivante :

$$Ind_{\gamma}(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Remarque 18. On peut interpréter l'indice comme "le nombre de fois où γ tourne autour de z ".

Exemple 19. Si γ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r , on a

$$Ind_{\gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r, \\ 0 & \text{si } |z - a| > r. \end{cases}$$

Proposition 20. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω . Alors f possède une primitive sur Ω si et seulement si pour tout lacet γ dans Ω , l'intégrale $\int_{\gamma} f$ est nulle.

Théorème 21 (Théorème de Cauchy pour un convexe). Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w \in \Omega$ et f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus w$. Alors f possède une primitive sur Ω et, pour tout lacet γ dans Ω , on a :

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Théorème 22 (Formule de Cauchy pour un convexe.). Soient γ un lacet d'un ouvert convexe Ω de $\mathbb{C}$, $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ et $f \in H(\Omega)$. Alors :

$$f(z)Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En appliquant cette formule pour un cercle orienté positivement, on obtient le théorème suivant :

Théorème 23 (Théorème de Cauchy local, ou théorème de Cauchy-Taylor). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\bar{D}(a, r)$ un disque fermé contenu dans Ω , de bord positivement orienté γ . Soit $f \in H(\Omega)$. Alors :

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall z \in D(a, r), f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

En particulier, le théorème précédent nous montre qu'une fonction holomorphe sur un ouvert y est développable en série entière (on a obtenu une expression des coefficients de son développement). On a donc enfin démontré le théorème reliant les différents points de vue sur les fonctions holomorphes :

Théorème 24. *Une fonction est analytique sur Ω si et seulement si elle est holomorphe sur Ω . Autrement dit, $H(\Omega) = A(\Omega)$.*

Donnons une autre illustration de la théorie de Cauchy. La formule de Cauchy permet de contrôler les dérivées d'une fonction holomorphe.

Théorème 25 (Inégalités de Cauchy). *Soit f holomorphe au voisinage du disque $\bar{D}(a, R)$ et admettant à l'intérieur du disque le développement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Pour $0 \leq r \leq R$, notons $M(r) := \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. Alors :*

$$\forall n \geq 0, \forall r \leq R, |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Le théorème de Liouville (qui est en fait encore une fois dû à Cauchy) est une conséquence de ces inégalités.

Théorème 26 (Liouville). *Une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur tout $\mathbb{C}$) bornée est constante.*

Une conséquence classique de ce théorème est le résultat suivant, parfois qualifié de "théorème fondamental de l'algèbre" :

Théorème 27 (D'Alembert-Gauss). *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Démonstration. Si par l'absurde P est un polynôme non constant n'admettant pas de racine sur $\mathbb{C}$, alors $\frac{1}{P}$ est une fonction entière bornée donc constante par le théorème de Liouville, ce qui contredit le caractère non constant de P . $\square$

2.2 Exponentielle et logarithmes

Maintenant que nous avons mis en place les bases de la théorie des fonctions holomorphes, nous donnons un premier exemple explicite en la personne de la fonction exponentielle. Cela nous mène naturellement au problème de la détermination du logarithme. En particulier, il s'agira d'un ingrédient important dans la démonstration du théorème de représentation conforme que nous permettra de considérer des racines carrées de certaines fonctions.

Définition 28 (Exponentielle). La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de convergence infini. On définit pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 29. *La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, est sa propre dérivée et induit un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. En particulier, chaque nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, et on a $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.*

Définition 30 (Biholomorphisme). Un **biholomorphisme** entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{C}$ est une bijection $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ telle que f et f^{-1} soient holomorphes sur Ω et Ω' respectivement.

Théorème 31 (Inversion locale holomorphe). *Une fonction holomorphe induit un biholomorphisme local au voisinage de chaque point où sa dérivée ne s'annule pas.*

Proposition 32. *L'application $\exp$ est un revêtement holomorphe de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}$. Explicitement, pour tout $w_0 \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert W_0 de w_0 ainsi qu'une collection d'ouverts V_k deux à deux disjoints de la forme $V_k = V_0 + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ tels que :*

- $\exp^{-1}(W_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k$,
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\exp|_{V_k} : V_k \rightarrow W_0$ est un biholomorphisme,
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(\exp|_{V_k})^{-1} = (\exp|_{V_0})^{-1} + 2ik\pi$.

Définition 33 (Logarithmes). Une fonction f définie sur un domaine Ω est appelée **détermination du logarithme** sur Ω si elle vérifie

$$\forall z \in \Omega, e^{f(z)} = z.$$

On dit que f est la **détermination principale du logarithme** sur Ω si, de plus, $1 \in \Omega$ et $f(1) = 0$.

Définition 34. Un espace topologique X est dit **simplement connexe** s'il est connexe par arcs et si tout lacet sur X est homotope à un point. Une partie A d'un espace topologique X est dite simplement connexe si l'ensemble A muni de la topologie induite l'est.

Théorème 35. Toute application holomorphe g définie sur un ouvert simplement connexe Ω qui ne s'annule pas est de la forme e^f pour une certaine fonction f holomorphe sur Ω . La dérivée de f est donnée par $f' = \frac{g'}{g}$ et f est unique à l'addition près d'une constante $2ik\pi$.

Corollaire 36. Il existe des déterminations principales du logarithme sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas l'origine. De telles détermination sont holomorphes, de dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$ et deux déterminations diffèrent d'une constante $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Vers le théorème de représentation conforme

On présente dans cette partie d'autres résultats classiques propres aux fonctions holomorphes. Beaucoup seront utilisés dans la preuve de ce qui pourrait constituer un premier très beau développement lors d'un oral : le théorème de représentation conforme.

2.3.1 Principe du maximum et conséquences

Théorème 37 (Principe du maximum). Soit f une fonction holomorphe bornée sur un domaine Ω . Si $|f(z_0)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$ pour un certain point $z_0 \in \Omega$, alors f est constante sur Ω .

Corollaire 38. Soit Ω un domaine borné et soit f continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω . Alors,

$$\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

Théorème 39 (Lemme de Schwarz). Soient $M \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ tels que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors $f'(0) \leq M$ et $|f(z)| \leq M|z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, les égalités $|f'(0)| = M$ et $|f(z_0)| = M$ ne peuvent avoir lieu que si f est de la forme $f(z) = Me^{i\theta_0}$ pour un certain $\theta_0 \in [0, 2\pi[$.

Quelques corollaires du lemme de Schwarz (utiles pour la démonstration du théorème de représentation conforme) :

Corollaire 40. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Si f n'est pas injective sur $\mathbb{D}$, alors $|f'(0)| < M$.

Corollaire 41. Les rotations sont les seuls automorphismes de $\mathbb{D}$ (c'est-à-dire les biholomorphismes de $\mathbb{D}$ dans lui-même) qui fixent l'origine.

Corollaire 42. Les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont les fractions linéaires de la forme

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = R_\theta \circ \tau_a(z),$$

où $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, avec $R_\theta(z) := e^{i\theta}z$ et $\tau_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. De plus, pour tout $a \in \mathbb{D}$, $(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$.

Remarque 43. Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agit donc transitivement sur $\mathbb{D}$.

2.3.2 Robustesse

Dans toute la suite, on dira qu'une suite d'applications *converge uniformément localement* pour dire qu'elle converge uniformément sur tout compact de l'ensemble considéré.

Théorème 44 (Weierstrass). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément localement vers f sur Ω , alors f est holomorphe, et les suites des dérivées $(f_n^{(k)})_n$ convergent uniformément localement vers $f^{(k)}$ les dérivées de f sur Ω .*

Le théorème suivant est une autre conséquence du principe du maximum.

Théorème 45 (Lemme d'Hurwitz). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ convergeant uniformément localement vers h sur Ω , et soit a un zéro isolé de h . Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(z_n)_{n \geq n_0}$ de points de Ω tels que $\lim_n z_n = a$ et pour tout $n \geq n_0$, $f_n(z_n) = 0$.*

Corollaire 46. *Si une suite $(f_n)_n$ de fonctions holomorphes non nulles sur un domaine Ω converge uniformément localement vers h sur Ω , alors ou bien h ne s'annule pas sur Ω , ou bien h est identiquement nulle sur Ω .*

Proposition 47. *Une fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ non constante définie sur un domaine Ω est ouverte. Si f est de plus injective, alors elle réalise un biholomorphisme sur son image, et sa dérivée ne s'annule pas sur Ω .*

Proposition 48. *Si une suite $(f_n)_n$ de fonctions holomorphes injectives définies sur un domaine Ω converge uniformément localement vers f sur Ω , alors ou bien f est injective sur Ω , ou bien f est constante sur Ω .*

2.3.3 Compacité

Définition 49 (Famille équicontinue). Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications de X dans Y .

- La famille $\mathcal{F}$ est dite **équicontinue en un point** $a \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_a de a tel que

$$x \in U_a \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

- On dit que $\mathcal{F}$ est **équicontinue** si elle l'est en chaque point de X .

Théorème 50 (Ascoli). *Soit X un espace topologique séparable possédant une exhaustion de compacts et soit (Y, d) un espace métrique compact. Toute suite d'applications de X dans Y qui est équicontinue sur X possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de X .*

Définition 51. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur un ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est **uniformément bornée sur E** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f_n(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si $\sup_n \sup_E |f_n| < +\infty$.

Théorème 52 (Montel). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si la suite $(f_n)_n$ est uniformément bornée sur Ω , alors elle admet une sous-suite qui converge uniformément localement sur Ω .*

2.3.4 Transformations conformes

Définition 53. Une **transformation conforme** ou **représentation conforme** sur un domaine Ω est une fonction holomorphe sur Ω conservant les angles en chaque point de Ω .

Proposition 54. *Soit Ω un domaine, $z_0 \in \Omega$ un point du domaine et f une fonction holomorphe en z_0 . Alors la fonction f est conforme en z_0 si et seulement si $f'(z_0) \neq 0$.*

Proposition 55. *La dérivée d'une fonction holomorphe et bijective sur Ω ne s'annule pas sur Ω .*

Ainsi, une application f entre deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ est une transformation conforme de U sur V si et seulement s'il s'agit d'une application holomorphe sur U et bijective entre U et V .

Exemples 56. — La transformation homographique

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

est une représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur le demi-plan droit $\mathbb{C}_0 := \{z \mid \Re(z) > 0\}$.

- Notons pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $S_\theta := \{z \in \mathbb{C}_0 \mid |\arg(z)| < \theta\}$. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ et tout β tel que $0 < \alpha\beta < \pi$, l'application $z \mapsto z^\beta$ est une représentation conforme de S_α sur $S_{\alpha\beta}$.
- La **transformation de Koebe**

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

est une représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$.

Théorème 57 (Représentation conforme). *Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ non-vide distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe non vide distinct de $\mathbb{C}$. On commence par montrer que l'on peut se ramener au cas où Ω est un ouvert borné.

Cela étant fait, la suite de la preuve se décompose en trois étapes :

- Première étape : Le biholomorphisme σ recherché est solution d'un problème extrémal ($\mathcal{E}$).
- Deuxième étape : Toute solution du problème extrémal ($\mathcal{E}$) est un biholomorphisme de Ω vers $\mathbb{D}$.
- Troisième étape : Construction d'une solution à ($\mathcal{E}$) à l'aide du théorème de Montel.

Commençons donc par montrer que Ω est biholomorphe à un domaine borné de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Comme a n'est pas dans Ω , la fonction $z \mapsto z - a$ ne s'annule pas sur le domaine Ω donc, d'après le théorème 35, il existe $h_a \in H(\Omega)$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $z - a = e^{h_a(z)}$. L'application holomorphe et injective $\psi_a : z \mapsto e^{\frac{1}{2}h_a(z)}$ est donc une racine carrée de $z \mapsto z - a$ sur Ω . On obtient ainsi, par la proposition 47, un biholomorphisme $\psi_a : \Omega \rightarrow \psi_a(\Omega)$. De plus, on a $-(\psi_a(\Omega)) \subset \mathbb{C} \setminus \psi_a(\Omega)$. En effet, si $\psi_a(z) = -\psi_a(z')$, alors en élevant au carré on en déduit $z = z'$ et donc $\psi_a(z) = 0$, ce qui est impossible par construction de ψ_a . Cela nous permet en particulier de considérer un disque ouvert $D(b, \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus \psi_a(\Omega)$. La fonction $h : z \mapsto \frac{1}{z-b}$ induit alors un biholomorphisme entre $\psi_a(\Omega)$ et un disque $D(0, \frac{1}{\epsilon})$, et finalement la composée $h \circ \psi_a$ réalise un biholomorphisme de Ω vers un domaine borné.

Maintenant, quitte à opérer une translation et une homothétie, on peut supposer $0 \in \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{D}$. En utilisant le fait que le groupe des automorphismes du disque agit transitivement (remarque 43), il nous suffit de construire un biholomorphisme $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tel que $\sigma(0) = 0$ pour conclure.

Montrons que le biholomorphisme σ est solution d'un problème extrémal. Considérons la famille

$$\mathcal{A}(\Omega) := \{f \in H(\Omega, \mathbb{D}) \mid f \text{ injective, } f(0) = 0, |f'(0)| \geq 1\}.$$

Comme 0 appartient à Ω qui est inclus dans $\mathbb{D}$, l'application $id_{\mathbb{D}}$ appartient à la famille $\mathcal{A}(\Omega)$ qui n'est donc pas vide. Supposons que σ soit un biholomorphisme de Ω vers $\mathbb{D}$ fixant l'origine. Le lemme de Schwarz (théorème 39) appliqué à σ^{-1} donne $|(\sigma^{-1})'(0)| \leq 1$, et donc $|\sigma'(0)| = \frac{1}{|(\sigma^{-1})'(0)|} \geq 1$, donc en particulier $\sigma \in \mathcal{A}(\Omega)$. De même, pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, le lemme de Schwarz appliqué à $f \circ \sigma^{-1}$ donne

$$|(f \circ \sigma^{-1})'(0)| \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$|f' \circ \sigma^{-1}(0) \times (\sigma^{-1})'(0)| = |f'(0) \times (\sigma^{-1})'(0)| \leq 1,$$

d'où $|f'(0)| \leq \frac{1}{|(\sigma^{-1})'(0)|} = |\sigma'(0)|$. Le biholomorphisme recherché est donc solution du problème extrémal :

$$(\mathcal{E}) : \sigma \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ et } |\sigma'(0)| = \sup_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} |f'(0)|.$$

Notons tout de suite que $\sup_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} |f'(0)| \geq 1$ puisque $id_{\mathbb{D}} \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Passons à la deuxième étape, où nous montrons que toute solution de $(\mathcal{E})$ est en réalité un biholomorphisme du domaine Ω vers $\mathbb{D}$. Il s'agit de montrer que si σ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors σ est surjective. Soit donc σ une telle solution et supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{D} \setminus \sigma(\Omega)$. Soit $\tau \in Aut(\mathbb{D})$ tel que $\tau(a) = 0$ et $\tau(0) = |a|$ (on peut par exemple considérer l'automorphisme donné par $\tau(z) = e^{-i(\pi + Arg(a))} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$). L'application $\tau \circ \sigma$ ne s'annule pas sur le domaine simplement connexe donc (théorème 35) il existe une fonction holomorphe h telle que $e^h = \tau \circ \sigma$ et $h(0) = \ln |a| =: x_0$. Comme $\tau \circ \sigma \subset \mathbb{D}$, on a sur tout $\Omega : |e^h| = e^{Re(h)} \leq 1$ donc $Re(h) < 0$, et donc $h(\Omega) \subset \mathbb{H}$.

Considérons maintenant le biholomorphisme $\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ défini par $\psi(z) = \frac{z-x_0}{z+x_0}$ et soit $g := \psi \circ h$. Par construction, on a $g(0) = 0$ et $g \in H(\Omega, \mathbb{D})$. En résumé on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \mathbb{H} & & \\ & \text{biholomorphisme} & & & \\ g \uparrow & & h \nearrow & & \downarrow \text{exp} \\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{D} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{D} \\ & \text{injection} & \text{automorphisme} & & \end{array}$$

Nous allons aboutir à une contradiction en montrant qu'on a à la fois $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $|g'(0)| > |\sigma'(0)| = \sup_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} |f'(0)|$. Posons $\varphi := \tau^{-1} \circ \exp \circ \psi^{-1}$. On a $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $\varphi(0) = 0$ mais φ n'est pas injective puisque $\exp$ ne l'est pas. Le corollaire 40 du lemme de Schwarz entraîne donc $|\varphi'(0)| < 1$. Comme le montre le diagramme, on a $\varphi \circ g = \sigma$. Comme σ est injective, nécessairement g l'est aussi donc sa dérivée ne s'annule pas sur Ω (proposition 47), et en dérivant l'égalité précédente on obtient ainsi

$$\sigma'(0) = \varphi'(g(0))g'(0) = \varphi'(0)g'(0),$$

d'où l'inégalité $|\sigma'(0)| < |g'(0)|$ (qui assure au passage l'appartenance de g à $\mathcal{A}(\Omega)$), qui est bien absurde.

Pour terminer cette démonstration, il ne nous reste donc plus qu'à construire une solution au problème extrémal $(\mathcal{E})$. C'est le théorème de Montel qui va nous permettre de mener à bien notre entreprise.

Soit (σ_n) une suite dans $\mathcal{A}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma'_n(0)| = \sup_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} |f'(0)|.$$

D'après le théorème 52 de Montel, il existe une sous-suite (σ_{n_k}) qui converge localement uniformément. Montrons que sa limite σ , qui est bien holomorphe sur Ω comme limite uniforme locale de fonctions holomorphes (théorème 44 de Weierstrass), est solution de $(\mathcal{E})$. Comme

$$|\sigma'(0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma'_n(0)| = \sup_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} |f'(0)|,$$

on a simplement à vérifier que $\sigma \in \mathcal{A}(\Omega)$. Nécessairement $|\sigma'(0)| \geq 1$ donc σ n'est pas constante et est donc injective en tant que limite non constante d'applications injectives holomorphes (proposition 48). Enfin, on a $\sigma(\Omega) \subset \mathbb{D}$ puisque σ est limite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{D}$, et le principe du maximum permet de conclure qu'on a en réalité $\sigma(\Omega) \subset \mathbb{D}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.4 Fonctions méromorphes

Dans cette dernière partie, nous abordons l'autre pan inévitable de cette leçon, les fonctions méromorphes. Nous donnons leur définition ainsi que quelques résultats classiques les concernant, que nous illustrerons dans la preuve de ce qui pourrait faire office de deuxième développement : le prolongement méromorphe sur le plan complexe de la fonction Γ .

2.4.1 Définitions

Définition 58 (Fonction méromorphe). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite **méromorphe** sur Ω s'il existe $\mathcal{P}$ un ensemble de points isolés de Ω (appelés **pôles** de f) tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ et si, en tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $f(z) \underset{z \rightarrow p}{\sim} b(z-p)^{-n}$.

Proposition 59. Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $K(a, \rho_1, \rho_2)$ avec $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$. Alors f est développable en série de Laurent dans cette couronne : il existe une famille de nombres complexes $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall z \in K(a, \rho_1, \rho_2), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

De plus, la convergence est normale sur tout compact de la couronne.

Si on considère γ le cercle de centre a et de rayon $\rho \in]\rho_1, \rho_2[$ orienté positivement à l'intérieur de la couronne, on obtient une expression des coefficients du développement en série de Laurent :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) e^{-int} dt.$$

Définition 60 (Singularités). Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $a \notin \Omega$. On dit que a est une **singularité isolée** de f s'il existe $\rho > 0$ tel que $K(a, 0, \rho) \subset \Omega$. Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f sur une telle couronne.

- Si pour tout $n < 0$ on a $c_n = 0$, on dit que a est une **singularité artificielle** de f . Dans ce cas, on peut prolonger f en une application holomorphe sur tout le disque $D(a, \rho)$.
- S'il existe $N > 0$ tel que pour tout $n < -N$, $c_n = 0$ et $c_{-N} \neq 0$, alors f est méromorphe sur $D(a, \rho)$ et le point a y est son seul **pôle**. De plus, ce pôle est d'ordre N .
- S'il existe une infinité d'indices $n < 0$ tels que $c_n \neq 0$, on dit que a est une **singularité essentielle**.

Exemple 61. La fonction $z \mapsto \exp(1/z)$ admet une singularité essentielle en 0.

2.4.2 Théorème des résidus

Définition 62. Le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent d'une fonction f en un point a est appelé **résidu de f en a** et est noté $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 63 (Théorème des résidus). Soit f une fonction holomorphe sur $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit γ un lacet dans $\tilde{\Omega}$ tel que pour tout $z \notin \Omega$, $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$. Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \text{Ind}(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k).$$

2.4.3 Étude d'une fonction spéciale

Théorème 64. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur un ouvert Ω telle que pour tout compact K de Ω , il existe un indice $N_K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K et que la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K . Alors la somme f de cette série est méromorphe sur Ω et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(k)} = \sum f_n^{(k)}.$$

Théorème 65 (Holomorphie sous le signe somme). Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Posons

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x).$$

Supposons que :

- (i) Pour tout $z \in \Omega$, l'application $x \mapsto f(z, x)$ est mesurable ;
- (ii) Pour μ -presque tout $x \in X$, l'application $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω ;
- (iii) pour tout compact K de Ω , il existe $g \in L^1(X)$ (indépendante de z) telle que $|f(z, x)| \leq g(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$ et tout z dans K .

Alors F est holomorphe sur Ω et, pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x).$$

Définition 66 (Fonction Γ). La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan droit $\mathbb{C}_0 := \{z \mid \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Proposition 67. La fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_0$.

Démonstration. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > \alpha$ arbitraires, notons $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \Re(z) < \beta\}$. On applique le théorème d'holomorphie sous le signe somme sur D à la fonction

$$f : (z, t) \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1) \log t} :$$

Pour tout $t > 0$, la fonction $f(\cdot, t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et la fonction $f(z, \cdot)$ est bien holomorphe dans D pour μ -presque tout t . Remarquons de plus que

$$|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\Re(z)-1} e^{-t} \leq (\mathbf{1}_{[0,1]} t^{\alpha-1} + \mathbf{1}_{]1,+\infty[} t^{\beta-1}) e^{-t},$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = (\mathbf{1}_{[0,1]} t^{\alpha-1} + \mathbf{1}_{]1,+\infty[} t^{\beta-1}) e^{-t}$ est intégrable. D'après le théorème d'holomorphie sous le signe somme, Γ est donc holomorphe sur D . Comme α et β ont été choisis arbitrairement, cela conclut pour l'holomorphie de Γ sur $\mathbb{C}_0$. □

Théorème 68. La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sont les $\{-n ; n \in \mathbb{N}\}$ et ce sont des pôles simples.

Démonstration. La démonstration se déroule en trois temps.

- Première étape : On montre d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}_0$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- Deuxième étape : On utilise le théorème (64) pour montrer que $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.
- Dernière étape : On conclut en recollant les bouts puisque l'on a déjà établi l'holomorphie sur le demi-plan droit à la proposition précédente.

Première étape : Tout d'abord, on sépare l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

On voit bien qu'il s'agit de travailler sur le premier terme pour aboutir à la formule désirée. Pour ce faire, on développe l'exponentielle :

$$t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}.$$

On cherche à appliquer le théorème de Fubini pour intervertir série et intégrale. Il s'agit donc de montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| < +\infty.$$

Comme $|t^z| = t^{\Re(z)}$, on a pour tout $t \in]0, 1]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| |t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{\Re(z)-1}.$$

Comme $\Re(z) > 0$, la fonction $t \mapsto e^t t^{\Re(z)-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et on peut donc intervertir. Cela nous donne :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

ce qui conclue la première étape.

Deuxième étape : Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.

Considérons maintenant K un compact de $\mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0, N)}$. Pour $n > N$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K et pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$. Ainsi, pour tout $z \in K$, on a $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$, et la série $\sum_{n>N} f_n$ est donc normalement convergente sur K .

On peut donc appliquer le théorème 64 et conclure la deuxième étape.

Dernière étape : Concluons. On sait depuis la proposition précédente que Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_0$. Les deux étapes précédentes nous ont permis d'établir un prolongement méromorphe de Γ sur tout le plan complexe, et que ses pôles sont simples et correspondent aux entiers négatifs. Enfin, remarquons que $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ est un ouvert connexe, et que le prolongement analytique que nous y avons déterminé est donc en particulier unique. $\square$

3 Questions de jury

Pour terminer, voici quelques questions posées lorsque cette leçon a été présentée en classe cette année. Certaines questions concernent des points que je n'ai pas abordés dans ce mémoire.

Question : Comment démontre-t-on la formule des compléments ?

Pour rappel, cette formule (dont le nom anglais est "Reflection formula", ce que je trouve beaucoup plus explicite) dit que pour tout complexe z de partie réelle comprise entre 0 et 1 strictement, on a l'égalité

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

On peut par exemple se servir de cette égalité pour effectuer des calculs numériques de certaines valeurs de Γ , ou encore pour donner une autre démonstration du prolongement méromorphe de cette fonction. La lectrice intéressée trouvera plus de détails dans [BB].

Question : Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n z^{2n}$. En donner une interprétation en terme de fonctions holomorphes.

Le rayon de convergence de cette série vaut 1. Sur $D(0,1)$, il s'agit d'une série géométrique de somme $\frac{1}{1+z^2}$. Cette dernière expression correspond à une fonction méromorphe de pôles $\pm i$. On retrouve en particulier le fait que sur le bord du disque de convergence, une série entière peut converger en certains points et diverger ailleurs.

Question : Que peut-on dire du nombre de zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle ?

Une fonction holomorphe admet un nombre au plus dénombrable de zéros. En effet, si on suppose par l'absurde que l'on a une infinité indénombrable de zéros, on peut considérer des boules centrées en les zéros et deux-à-deux disjointes par le principe des zéros isolés. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$), on peut trouver un point à coordonnées rationnelles dans chacune de ces boules. On construit ainsi une injection d'un ensemble indénombrable (les boules) vers un ensemble dénombrable, ce qui est absurde.

Question : Et maintenant, que peut-on dire du nombre de zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle **sur un compact** ?

Il est nécessairement fini ! Par l'absurde, dans le cas contraire, on peut extraire par compacité une suite convergente de zéros et donc construire un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de notre fonction, ce qui est impossible si elle n'est pas nulle partout par le principe des zéros isolés.

Références

- [BB] Julien BERNIS et Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques.*
- [Ber] François BERTELOOT. *Les familles normales.*
- [BMP] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Mathématiques : objectif agrégation.*
- [Car] Henri CARTAN. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.*
- [HS] Bertrand HAUCHECORNE et Daniel SURATTEAU. *Des mathématiciens de A à Z.*
- [Mar] Jean-Pierre MARCO. *Mathématiques Analyse L3.*
- [QQ] Hervé QUEFFÉLEC et Martine QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications.*
- [Rem] Reinhold REMMERT. *Theory of Complex Functions.*
- [Rud] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexes.*
- [Tau] Patrice TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3.*
- [ZQ] Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation.*